UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

4° PRÁCTICA CALIFICADADE ALGEBRA LINEAL

1.- Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar su respuesta, usando argumentos teóricos.

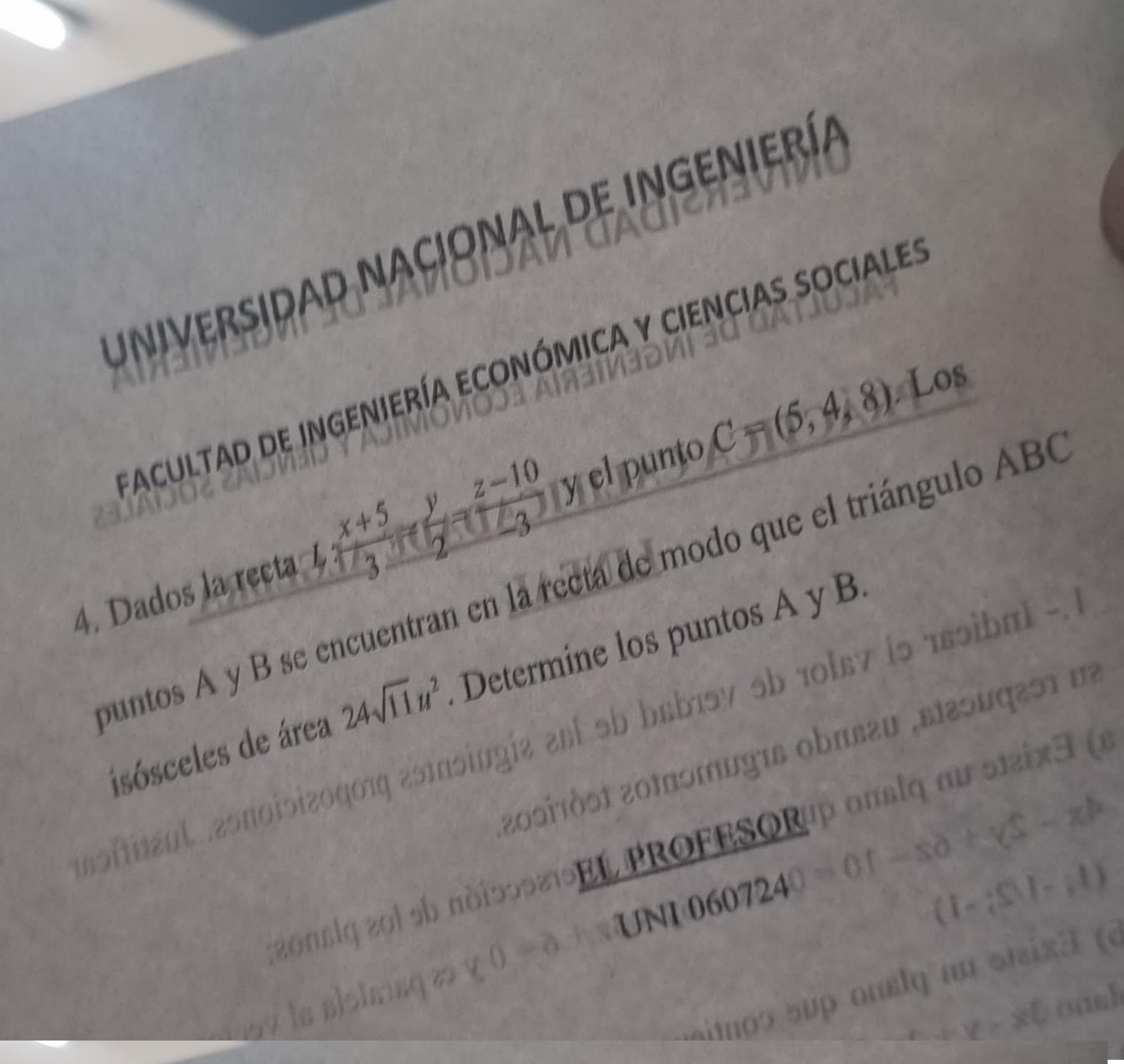
a) Existe un plano que pasa por la intersección de los planos: $4x-2y+6z-10=0; 3x+6y-3z+6=0$ y es paralela al vector $(1; -1/2; -1)$

b) Existe un plano que contiene al punto $(1 ; 2; -3)$ y sea paralelo sl plano $3x - y + 2z = 4$.

c) Existe una recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$, ortogonal a la recta $3x = 2y = z$, y paralela al plano $x + y - z = 0$.

2.- Dado el triángulo ABC, con $B = (-5, 2, 7)$, las rectas L_1: $x = 1$, $y-3 = \frac{z-3}{2}$, L_2 : $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{-1}=z-2$ son medianas trazadas desde A y C respectivamente .Determine los vértices del triángulo ABC.

3.-Dadas las rectas $L_1:\frac{x-8}{7}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$, $L_2: x-4=\frac{y+1}{-1}=z+3$. Determine la ecuación de la recta que contiene a la distancia mínima entre L_1 y L_2 .



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

4. Dados la recta $L: \frac{x+5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-10}{-3}$ y el punto $C=(5, 4, 8)$. Los puntos A y B se encuentran en la recta de modo que el triángulo ABC isósceles de área $24\sqrt{11}u^2$. Determine los puntos A y B.

(-5; 0 ; 10)

EL PROFESOR

UNI 060724

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

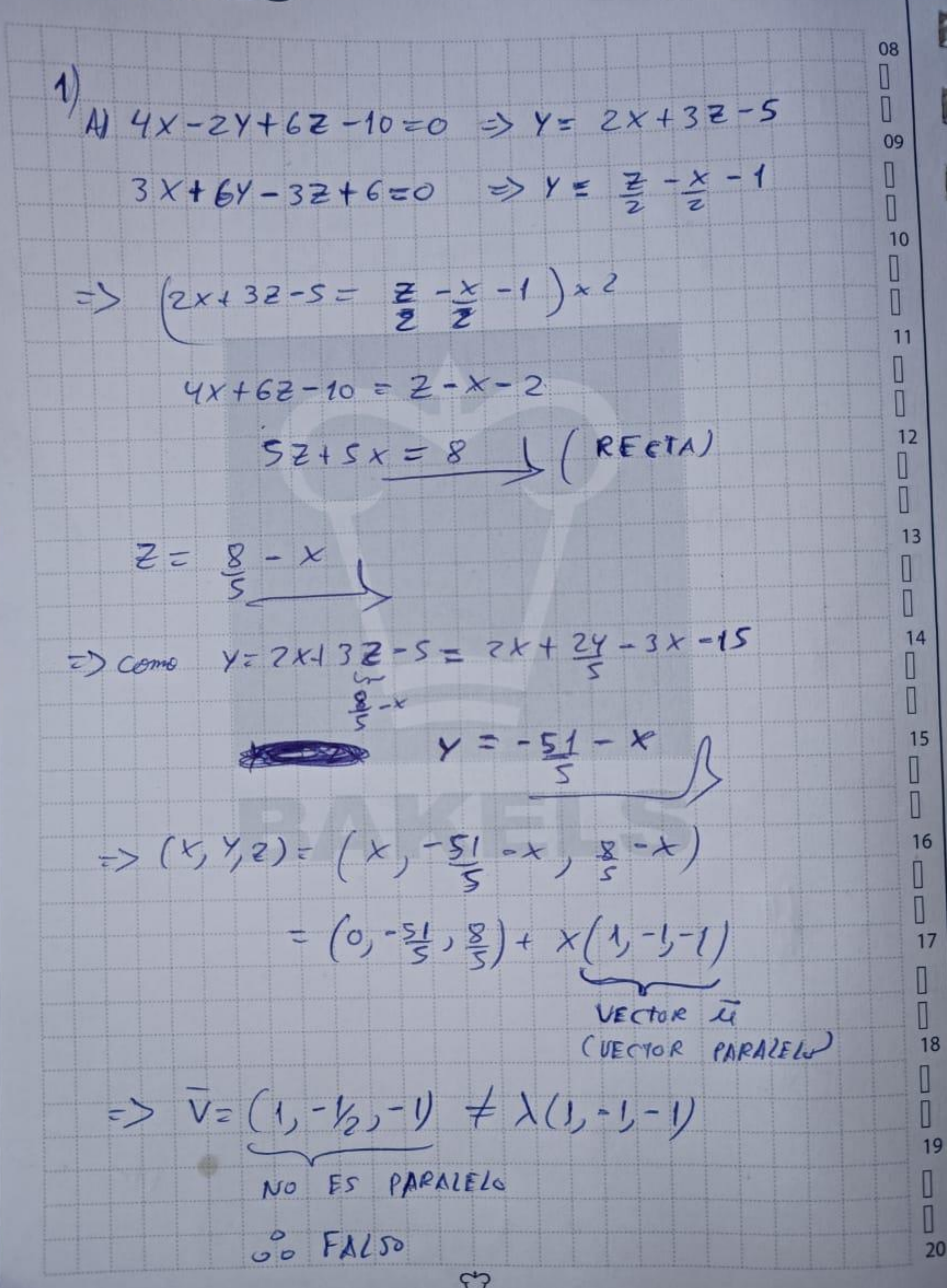
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

4. Dados la recta $L: \frac{x+5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-10}{-3}$ y el punto $C=(5, 4, 8)$. Los puntos A y B se encuentran en la recta de modo que el triángulo ABC isósceles de área $24\sqrt{11}u^2$. Determine los puntos A y B.

(-5; 0 ; 10)

EL PROFESOR

UNI 060724



BAKELS Fecha: / /

1)

A) $4x - 2y + 6z - 10 = 0 \Rightarrow y = 2x + 3z - 5$

$3x + 6y - 3z + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{z}{2} - \frac{x}{2} - 1$

$\Rightarrow \left(2x + 3z - 5 = \frac{z}{2} - \frac{x}{2} - 1\right) \times 2$

$4x + 6z - 10 = z - x - 2$

$5z + 5x = 8$ → (RECTA)

$z = \frac{8}{5} - x$

$\Rightarrow$ como $y = 2x + 3\underset{\frac{8}{5} - x}{z} - 5 = 2x + \frac{24}{5} - 3x - 15$

$y = -\frac{51}{5} - x$

$\Rightarrow (x, y, z) = \left(x, -\frac{51}{5} - x, \frac{8}{5} - x\right)$

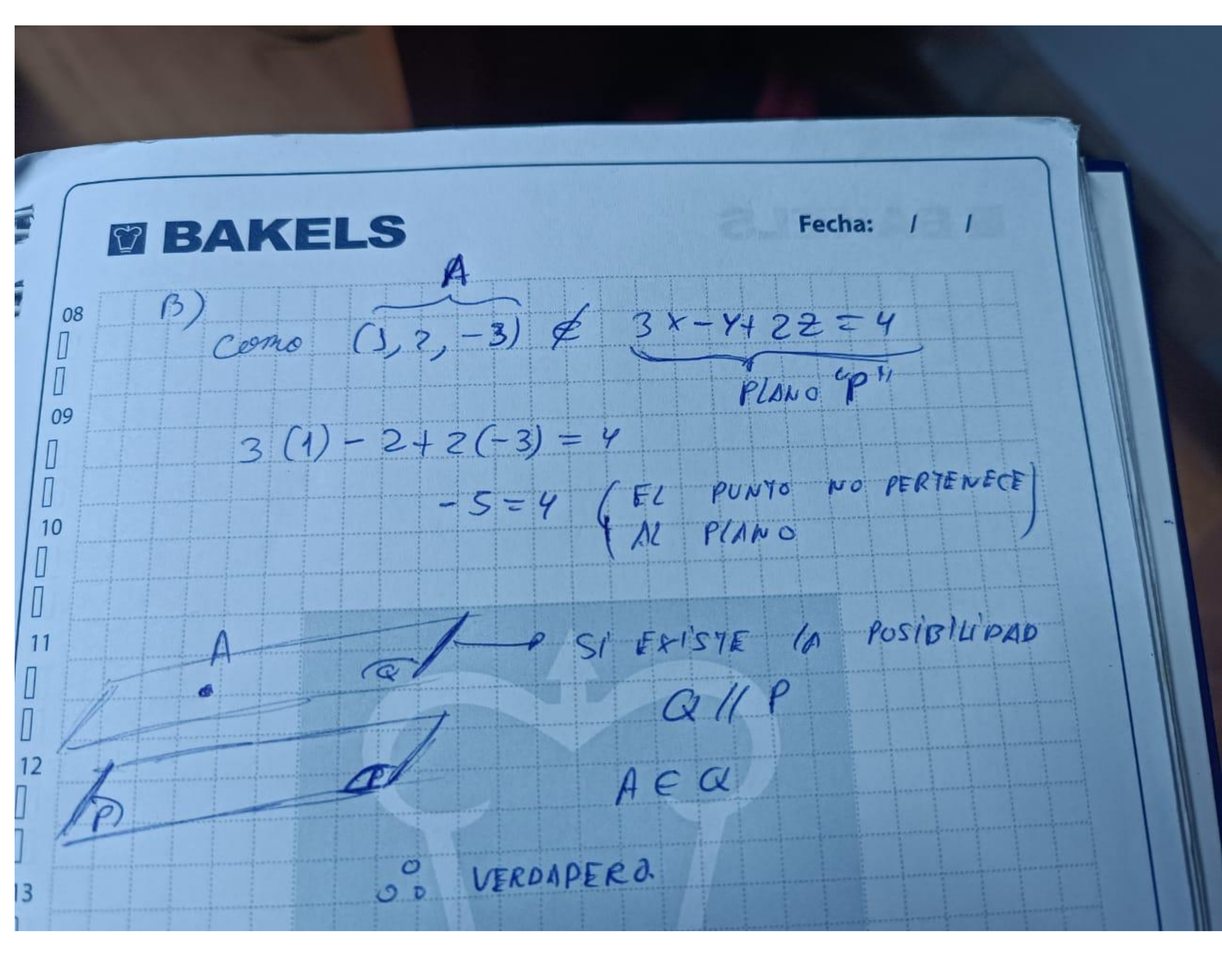
$= \left(0, -\frac{51}{5}, \frac{8}{5}\right) + x(1, -1, -1)$

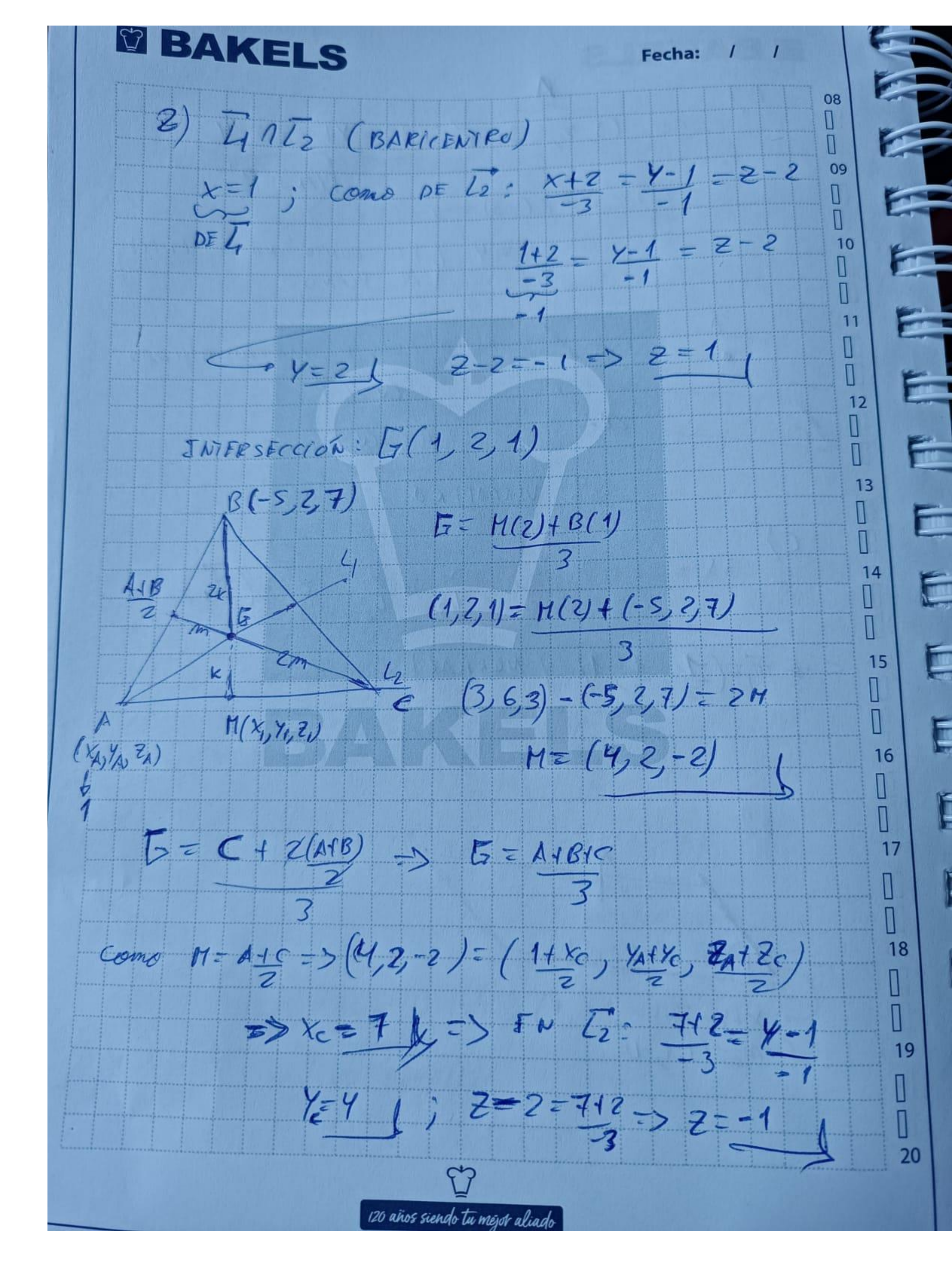
VECTOR $\vec{u}$
(VECTOR PARALELO)

$\Rightarrow \bar{v} = (1, -\frac{1}{2}, -1) \neq \lambda(1, -1, -1)$

NO ES PARALELO

∴ FALSO


BAKELS
Fecha: / /
08
09
10
11
12
13
B)
A
Como (1, 2, -3) ∉ 3x - y + 2z = 4
PLANO "P"
3(1) - 2 + 2(-3) = 4
-5 = 4
EL PUNTO NO PERTENECE AL PLANO
A
Q
P
SÍ EXISTE LA POSIBILIDAD
Q // P
A ∈ Q
∴ VERDADERO



2) $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ (BARICENTRO)

$\underbrace{x=1}_{\text{DE } \overline{L_1}}$; COMO DE $\overline{L_2}$: $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = z-2$

$\underbrace{\frac{1+2}{-3}}_{-1} = \frac{y-1}{-1} = z-2$

$\to y=2$; $z-2=-1 \Rightarrow z=1$

INTERSECCIÓN: $G(1,2,1)$

$G = \frac{M(2)+B(1)}{3}$

$(1,2,1) = \frac{M(2)+(-5,2,7)}{3}$

$(3,6,3)-(-5,2,7) = 2M$

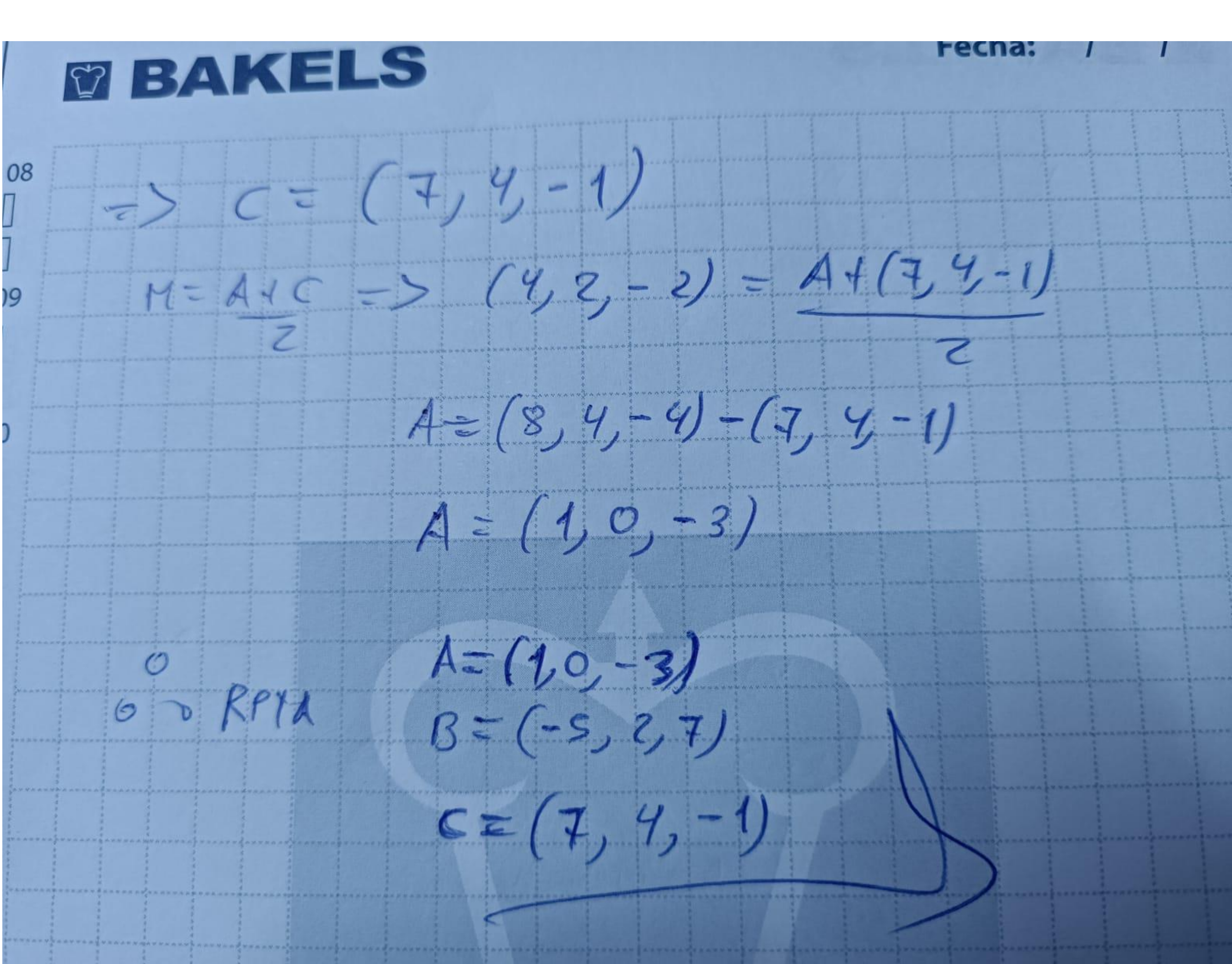
$M = (4,2,-2)$

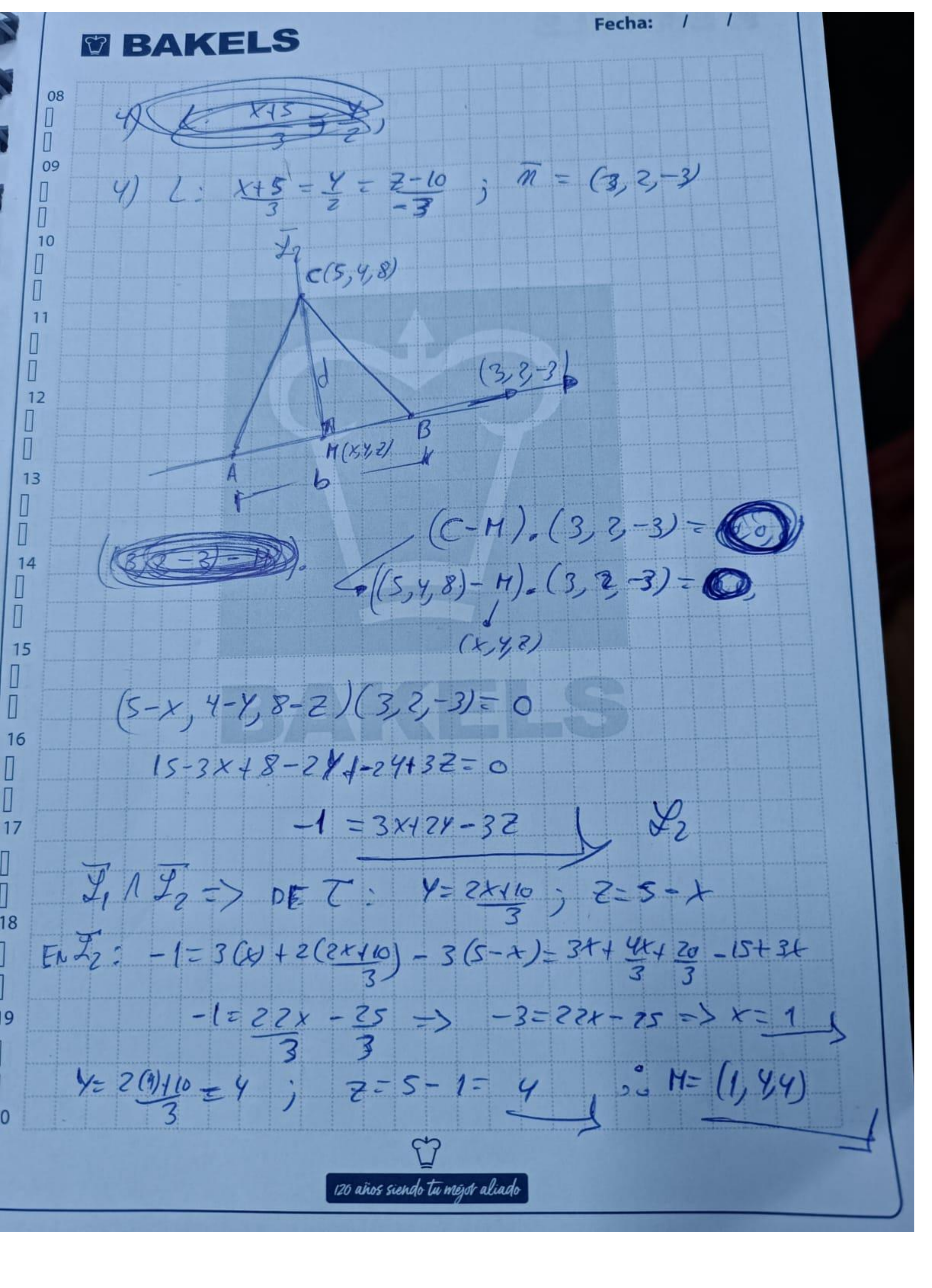
$G = \frac{C + 2\frac{(A+B)}{2}}{3} \Rightarrow G = \frac{A+B+C}{3}$

Como $M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow (4,2,-2) = \left(\frac{1+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2}\right)$

$\Rightarrow x_C = 7 \Rightarrow$ EN $\overline{L_2}$: $\frac{7+2}{-3} = \frac{y-1}{-1}$

$y_C = 4$; $z-2 = \frac{7+2}{-3} \Rightarrow z=-1$


BAKELS
Fecha: / /
08
09
$\Rightarrow C = (7, 4, -1)$
$M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow (4, 2, -2) = \frac{A+(7,4,-1)}{2}$
$A = (8, 4, -4) - (7, 4, -1)$
$A = (1, 0, -3)$
RPTA
$A = (1, 0, -3)$
$B = (-5, 2, 7)$
$C = (7, 4, -1)$



BAKELS

Fecha: / /

~~4) $L: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2}$~~

4) $L: \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-10}{-3}$; $\bar{n} = (3,2,-3)$

$(C-M)\cdot(3,2,-3) = 0$

$((5,4,8) - M)\cdot(3,2,-3) = 0$

$M \rightarrow (x,y,z)$

$(5-x,\ 4-y,\ 8-z)(3,2,-3) = 0$

$15-3x+8-2y-24+3z = 0$

$-1 = 3x+2y-3z \rightarrow L_2$

$L_1 \cap L_2 \Rightarrow$ DE L: $y = \frac{2x+10}{3}$; $z = 5-x$

En L_2: $-1 = 3(x) + 2\left(\frac{2x+10}{3}\right) - 3(5-x) = 3x + \frac{4x}{3} + \frac{20}{3} - 15 + 3x$

$-1 = \frac{22x}{3} - \frac{25}{3} \Rightarrow -3 = 22x - 25 \Rightarrow x = 1$

$y = \frac{2(1)+10}{3} = 4$; $z = 5-1 = 4$ $\therefore M = (1,4,4)$

$$d = d(C,M) = \sqrt{(5-1)^2+(4-4)^2+(8-4)^2}$$

$$d = \sqrt{16+0+16} = 4\sqrt{2}$$

$$A : AREA = \frac{d \cdot b}{2} = 24\sqrt{11}$$

$$\frac{4\sqrt{2}\, b}{2} = 24\sqrt{11} \Rightarrow b = 12\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{12\sqrt{22}}{2} = 6\sqrt{22}$$

$$d(M,B) = \frac{b}{2} = 3\sqrt{22} \Rightarrow B = M + \hat{u}(3\sqrt{22})$$

$$B = (1,4,4) + \left(\frac{3,2,-3}{\sqrt{3^2+2^2+3^2}}\right) 3\sqrt{22}$$

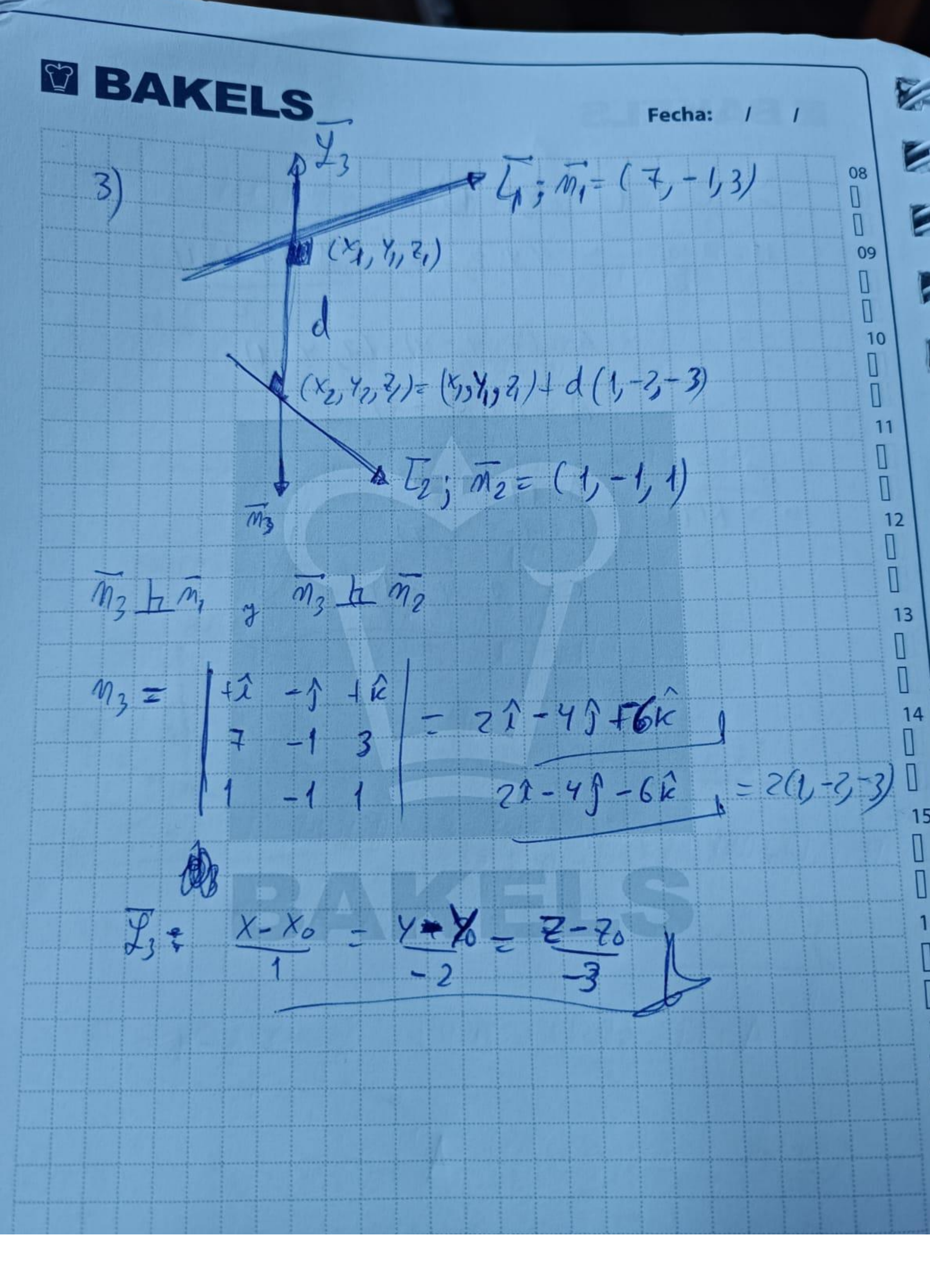
$$B = (1,4,4) + \left(\frac{3,2,-3}{\sqrt{22}}\right) 3\sqrt{22} = (1,4,4) + (9,6,-9)$$

$$B = (10,10,-5)$$

como $M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow (1,4,4) = \frac{(10,10,-5)+A}{2}$

$$A = (-8,-2,13)$$

$$\therefore A = (-8,-2,13) \; ; \; B = (10,10,-5)$$



BAKELS

Fecha: / /

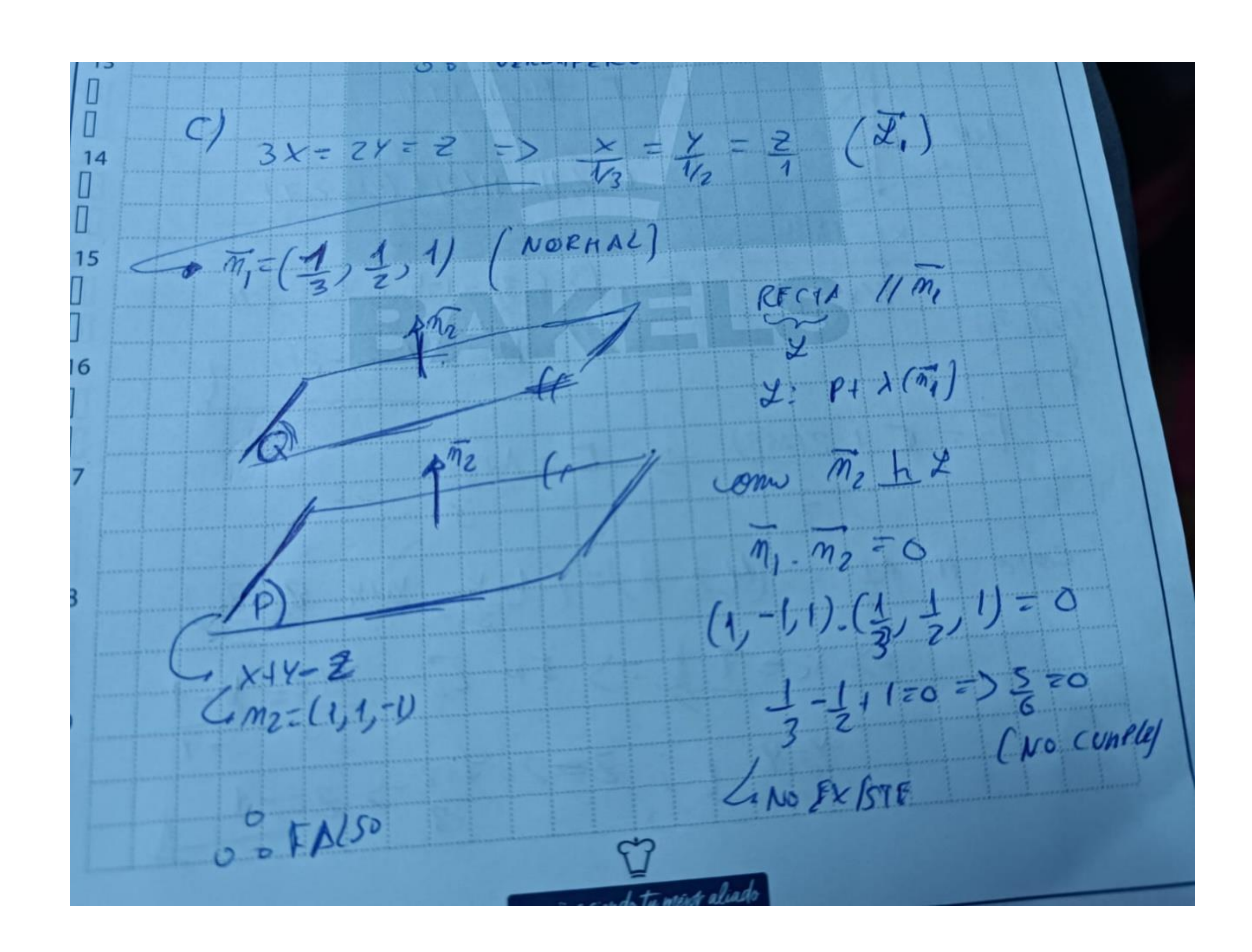
3)

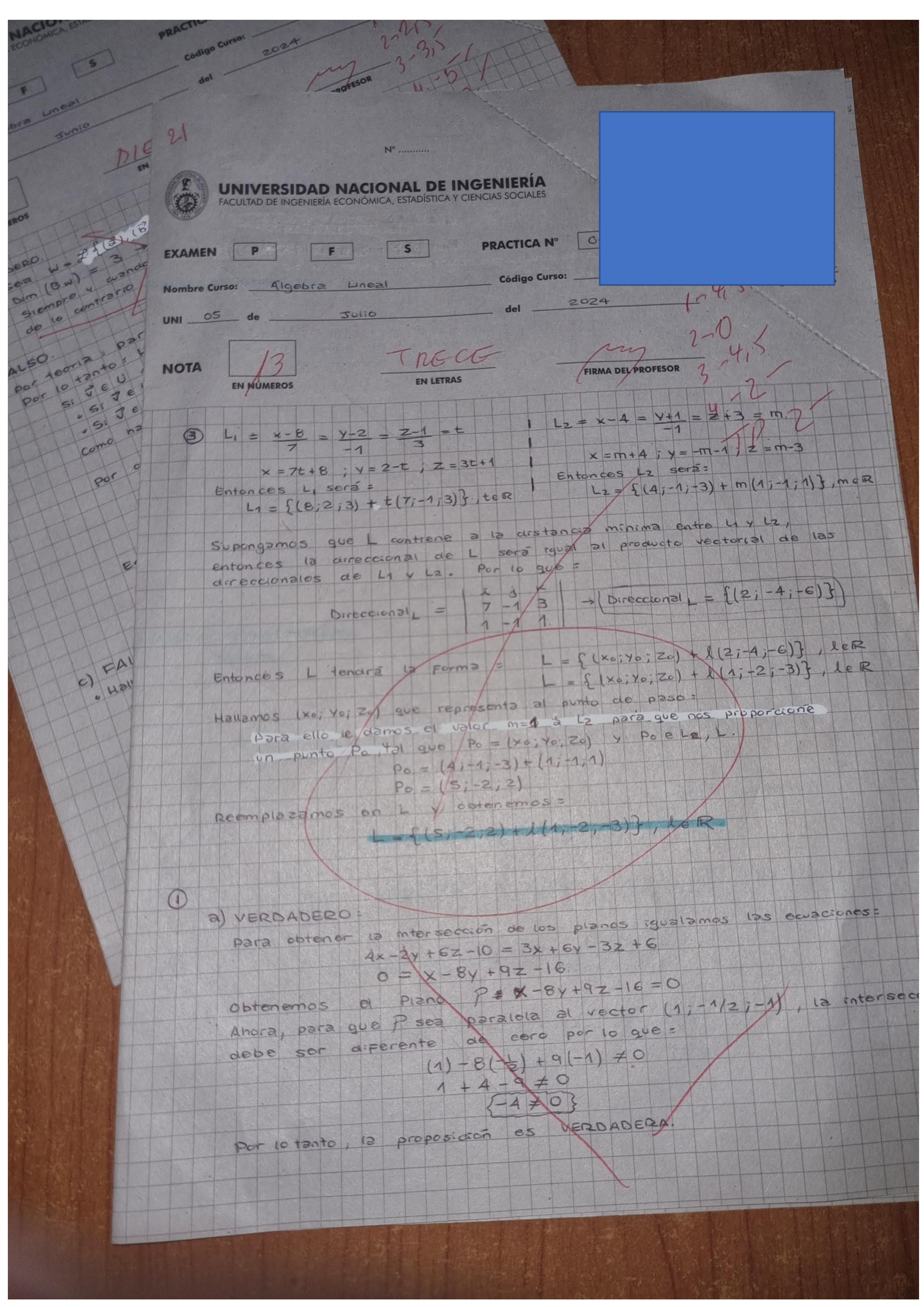
$\overline{n_3} \perp \overline{n_1}$ y $\overline{n_3} \perp \overline{n_2}$

$$n_3 = \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 7 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$$

$2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k} = 2(1, -2, -3)$

$$\overline{L_3} : \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-2} = \frac{z - z_0}{-3}$$


c)
3x = 2y = z => x/(1/3) = y/(1/2) = z/1 (L1)
n1 = (1/3, 1/2, 1) (NORMAL)
RECTA // n1
L
L: P + λ(n1)
n2
Q
n2
P
x+y-z
n2 = (1, 1, -1)
como n2 ⊥ L
n1 · n2 = 0
(1, -1, 1) · (1/3, 1/2, 1) = 0
1/3 - 1/2 + 1 = 0 => 5/6 = 0
(NO CUMPLE)
NO EXISTE
∴ FALSO



N° ....

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES

EXAMEN P F S PRACTICA N° [redacted]

Nombre Curso: Algebra Lineal Código Curso: [redacted]

UNI 05 de Julio del 2024

NOTA 13 (EN NÚMEROS) TRECE (EN LETRAS) FIRMA DEL PROFESOR

2 – 10, 3 – 4,5, 3 – 2

③ $L_1 = \frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3} = t$

$x = 7t+8$; $y = 2-t$; $z = 3t+1$

Entonces L_1 será:

$L_1 = \{(8;2;3) + t(7;-1;3)\}, t \in \mathbb{R}$

$L_2 = x-4 = \frac{y+1}{-1} = z+3 = m$

$x = m+4$; $y = -m-1$; $z = m-3$

Entonces L_2 será:

$L_2 = \{(4;-1;-3) + m(1;-1;1)\}, m \in \mathbb{R}$

Supongamos que L contiene a la distancia mínima entre L_1 y L_2, entonces la direccional de L será igual al producto vectorial de las direccionales de L_1 y L_2. Por lo que:

$$\text{Direccional}_L = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Direccional}_L = \{(2;-4;-6)\}$$

Entonces L tendrá la forma: $L = \{(x_0;y_0;z_0) + \lambda(2;-4;-6)\}, \lambda \in \mathbb{R}$

$L = \{(x_0;y_0;z_0) + \lambda(1;-2;-3)\}, \lambda \in \mathbb{R}$

Hallamos $(x_0;y_0;z_0)$ que representa al punto de paso: para ello le damos el valor $m=1$ a L_2 para que nos proporcione un punto P_0, tal que $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$ y $P_0 \in L_2, L$.

$P_0 = (4;-1;-3) + (1;-1;1)$

$P_0 = (5;-2;2)$

Reemplazamos en L y obtenemos:

$L = \{(5;-2;2) + \lambda(1;-2;-3)\}, \lambda \in \mathbb{R}$

①

a) VERDADERO:

Para obtener la intersección de los planos igualamos las ecuaciones:

$4x-2y+6z-10 = 3x+6y-3z+6$

$0 = x-8y+9z-16$

Obtenemos el plano $P: x-8y+9z-16=0$, la intersec…

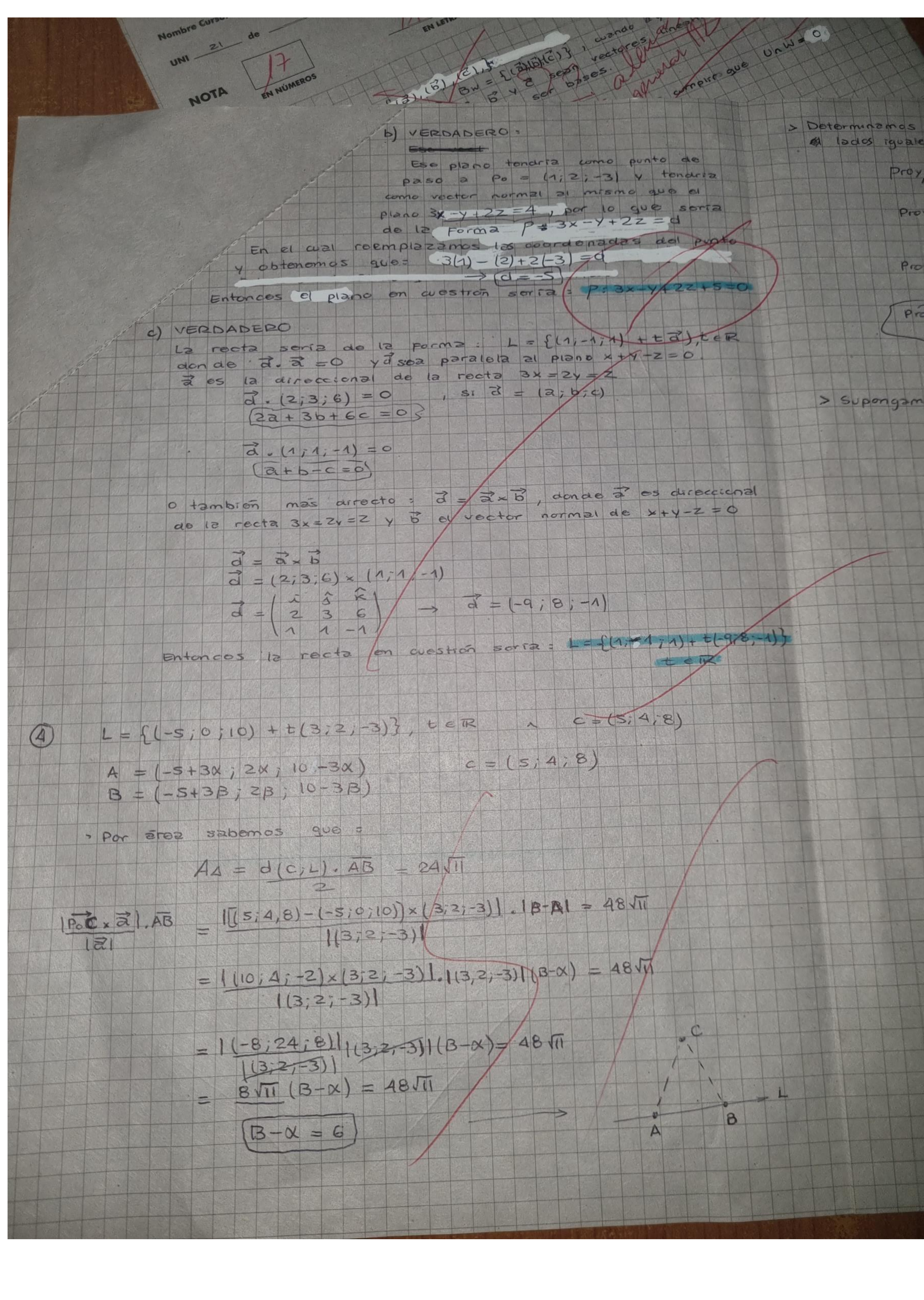
Ahora, para que P sea paralela al vector $(1;-1/2;-1)$ … debe ser diferente de cero por lo que:

$(1) - 8(-\frac{1}{2}) + 9(-1) \neq 0$

$1 + 4 - 9 \neq 0$

$-4 \neq 0$

Por lo tanto, la proposición es VERDADERA.



b) VERDADERO:

Ese plano tendría como punto de paso a $P_0 = (1;2;-3)$ y tendría como vector normal al mismo que el plano $3x - y + 2z = 4$, por lo que sería de la forma $P: 3x - y + 2z = d$

En el cual reemplazamos las coordenadas del punto y obtenemos que: $3(1) - (2) + 2(-3) = d$

$\rightarrow d = -5$

Entonces el plano en cuestión sería: $P: 3x - y + 2z + 5 = 0$

c) VERDADERO

La recta sería de la forma: $L = \{(1;-1;1) + t\vec{d}\}, t \in \mathbb{R}$ donde $\vec{d} \cdot \vec{a} = 0$ y $\vec{d}$ sea paralela al plano $x + y - z = 0$.

$\vec{a}$ es la direccional de la recta $3x = 2y = z$

$\vec{d} \cdot (2;3;6) = 0$, si $\vec{d} = (a;b;c)$

$2a + 3b + 6c = 0$

$\vec{d} \cdot (1;1;-1) = 0$

$a + b - c = 0$

o también más directo: $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, donde $\vec{a}$ es direccional de la recta $3x = 2y = z$ y $\vec{b}$ el vector normal de $x + y - z = 0$

$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{d} = (2;3;6) \times (1;1;-1)$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{d} = (-9;8;-1)$

Entonces la recta en cuestión sería: $L = \{(1;-1;1) + t(-9;8;-1)\}$ $t \in \mathbb{R}$

(4) $L = \{(-5;0;10) + t(3;2;-3)\}, t \in \mathbb{R}$ ∧ $C = (5;4;8)$

$A = (-5+3\alpha; 2\alpha; 10-3\alpha)$ $C = (5;4;8)$

$B = (-5+3\beta; 2\beta; 10-3\beta)$

› Por área sabemos que:

$A_\Delta = \dfrac{d(C;L) \cdot \overline{AB}}{2} = 24\sqrt{11}$

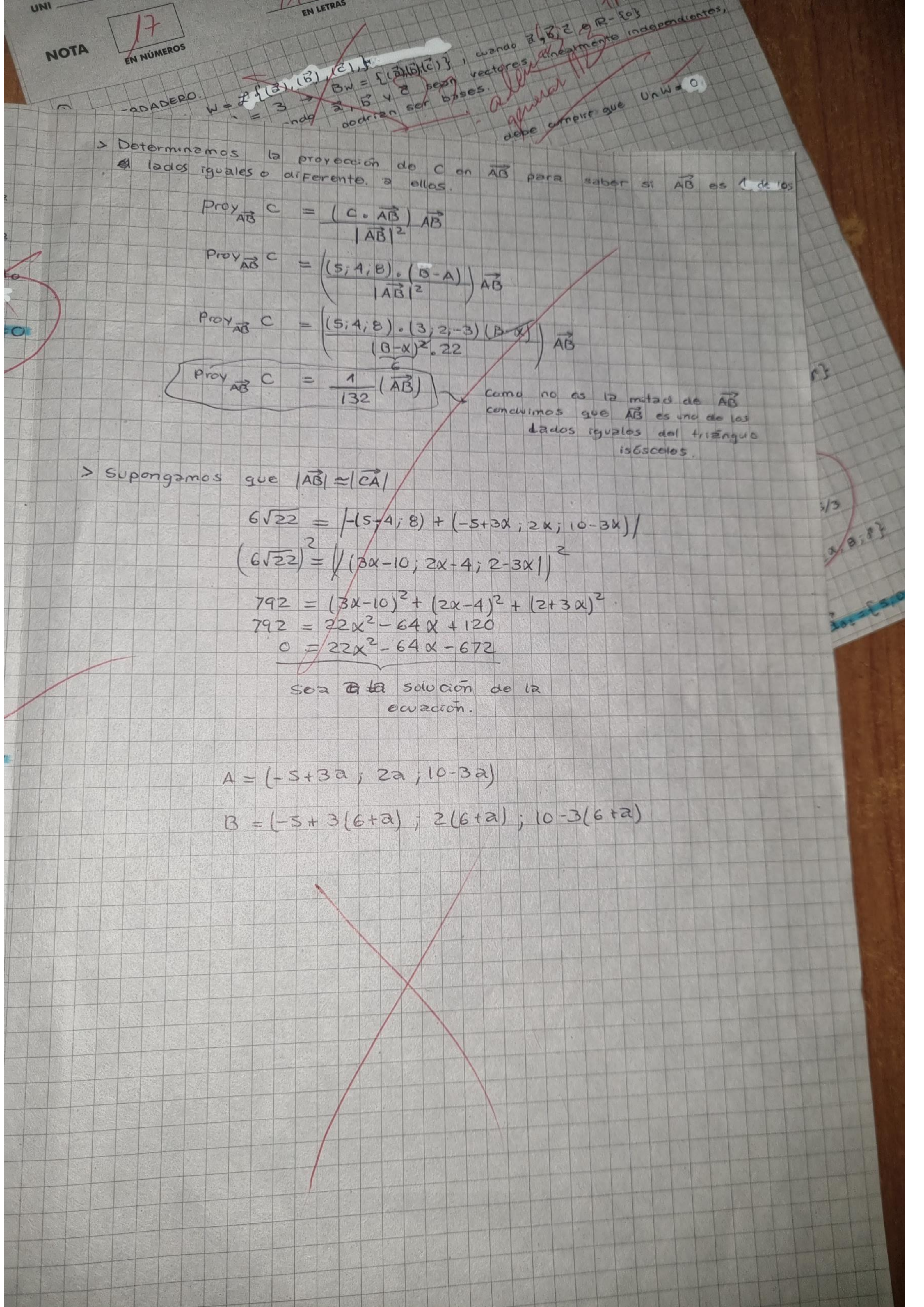
$\dfrac{|\overrightarrow{P_0C} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \cdot \overline{AB} = \dfrac{|[(5;4;8) - (-5;0;10)] \times (3;2;-3)|}{|(3;2;-3)|} \cdot |B - A| = 48\sqrt{11}$

$= \dfrac{|(10;4;-2) \times (3;2;-3)|}{|(3;2;-3)|} \cdot |(3,2,-3)|(\beta - \alpha) = 48\sqrt{11}$

$= \dfrac{|(-8;24;8)|}{|(3;2;-3)|} |(3;2;-3)|(\beta - \alpha) = 48\sqrt{11}$

$= 8\sqrt{11}(\beta - \alpha) = 48\sqrt{11}$

$\beta - \alpha = 6$



UNI

NOTA 17 EN NÚMEROS — EN LETRAS

> Determinamos la proyección de C en $\vec{AB}$ para saber si $\vec{AB}$ es 1 de los lados iguales o diferente a ellos.

$$\text{Proy}_{\vec{AB}}\, C = \frac{(C \cdot \vec{AB})}{|\vec{AB}|^2}\vec{AB}$$

$$\text{Proy}_{\vec{AB}}\, C = \left(\frac{(5;4;8)\cdot(B-A)}{|\vec{AB}|^2}\right)\vec{AB}$$

$$\text{Proy}_{\vec{AB}}\, C = \left(\frac{(5;4;8)\cdot(3;2;-3)\,(B-\alpha)}{\underbrace{(B-\alpha)^2}_{6}\cdot 22}\right)\vec{AB}$$

$$\boxed{\text{Proy}_{\vec{AB}}\, C = \frac{1}{132}(\vec{AB})}$$

Como no es la mitad de $\vec{AB}$ concluimos que $\vec{AB}$ es uno de los lados iguales del triángulo isósceles.

> Supongamos que $|\vec{AB}| \simeq |\vec{CA}|$

$$6\sqrt{22} = |-(5;4;8) + (-5+3\alpha;\, 2\alpha;\, 10-3\alpha)|$$

$$(6\sqrt{22})^2 = \|(3\alpha-10;\, 2\alpha-4;\, 2-3\alpha)\|^2$$

$$792 = (3\alpha-10)^2 + (2\alpha-4)^2 + (2+3\alpha)^2$$

$$792 = 22\alpha^2 - 64\alpha + 120$$

$$0 = 22\alpha^2 - 64\alpha - 672$$

Sea a la solución de la ecuación.

$$A = (-5+3a;\, 2a;\, 10-3a)$$

$$B = (-5+3(6+a);\, 2(6+a);\, 10-3(6+a))$$